

中国科学技术大学数学系2008博士资格考试样题
数值计算

(满分100分, 3小时)

1. 给定二维平面上的六个结点, 如果它们位于椭圆、抛物线或者双曲线上, 那么在这些结点上应用二元多项式空间 $\Pi_k(\mathbb{R}^2)$ 插值的可能性如何? 有没有结点的其它结构, 发生同样的问题? (6分)

2. 考虑数值积分公式

$$\int_0^1 f(x) \log(1/x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$

其对所有次数不超过3的多项式准确成立。

- (a) 给出确定 w_1, w_2, x_1, x_2 的方程组; (4分)

- (b) 求解该方程组。(5分)

3. 令 $f(x) = \sin(x) + 2x - \frac{1}{2}$, $g(x) = \sin(x) + 2x$. 则 $h(t, x) = tf(x) + (1-t)g(x)$, $0 \leq t \leq 1$ 为它们之间的一个同伦。

- (a) 试导出从 $t = 0$ 时 $g(x) = 0$ 的根 $x(0) = 0$ 出发, 到 $t = 1$ 时 $x(1)$ 为 $f(x) = 0$ 的一个根的根曲线 $x(t)$ 所满足的常微分方程初值问题(3分)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(t, x), 0 < t < 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

- (b) 给出用向后的隐式Euler折线法求解此常微分方程初值问题, 得到 $f(x) = 0$ 的根 $x(1)$ 的数值格式。(2分)

- (c) 试在每一时间步构造一个迭代序列近似求解隐式格式所带来的非线性方程, 并说明其收敛性。(5分)

4. 考虑线性代数方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, $m \geq n$,

- (a) 给出此问题最小二乘解的定义。(1分)

- (b) 最小二乘解是否一定存在? 证明你的结论。(4分)

- (c) 若最小二乘解存在, 什么条件下唯一?(2分)

- (d) 给出尽可能多的求解最小二乘解的算法(若解不唯一, 可求长度最小的解), 并对各算法给出你的推荐意见。(3分)

5. 分别分析偏微分方程 $u_t + au_x = 0$ 的耗散性、色散性，并分析它的FTCS格式的数值耗散性、色散性和稳定性。(10分)

6. 试构造

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx}, \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

的周期性边界问题(周期为1)的有限差分格式，并讨论其稳定性和精度。(20分)

7. 设节点序列 $\{0, 0, 0, 2, 5, 7, 10, 12, 14\}$, 控制顶点 $\{\mathbf{p}_0 = (-2, -2)^T, \mathbf{p}_1 = (-2, 2)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, 3)^T, \mathbf{p}_3 = (0, 1)^T, \mathbf{p}_4 = (1, 0)^T, \mathbf{p}_5 = (2, 1)^T, \mathbf{p}_6 = (3, 3)^T\}$. 请给出相应的B-样条曲线，写出第二段和第三段的Bézier表示，并求曲线在 $t = 6$ 处的一阶至四阶导数信息。同时证明该B-样条曲线的弧长不会比其控制多边形的总长度来得大。(20分)

8. 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + b u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = g(y) & \text{on } \gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h & \text{on } \gamma_2 = \partial\Omega \setminus \gamma_1 \end{cases}$$

其中 $b > 0$, $\alpha \geq 0$ 是两个常数，

(a) 分别给出此问题基于虚功原理的弱形式(P1)和基于最小势能原理的弱形式(P2). (4分)

(b) 证明(P1)与(P2)等价. (4分)

(c) 对 Ω 做正则的三角形剖分 T_h , 试构造 T_h 上的协调的分片二次有限元空间 (对每个单元 $T \in T_h$, 取6个节点为3个顶点和3边中点, 然后构造单元插值基即可). (4分)

(d) 写出相应的有限元格式; 假设 $g \equiv 0$, f 和 h 充分光滑, 试给出有限元解的误差估计. (3分)