中 国 科 学 技 术 大 学
2013 年大学生数学夏令营竞赛试题
(分析学)

数学分析

1. 设连续函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足: $\int_0^1 f(xt)dt=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 证明: $f\equiv 0$.

2. 考虑函数
$$f(x):=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
证明: 当且仅当 $\alpha\le 1/2$ 时
$$F(x,y):=\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}$$
在 $[0,1]^2$ 上有界.

3. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上一个三次连续可微的非负函数, 满足 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)>0$.
$$g(x):=\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)', & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
证明: g 在 0 的某个邻域内有界.

4. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足:

   (i) $\forall y\in\mathbb{R}, x\mapsto f(x,y)$ 连续;

   (ii) $\forall x\in\mathbb{R}, y\mapsto f(x,y)$ 连续;

   (iii) f 将 $\mathbb{R}^2$ 的每一紧子集映为 $\mathbb{R}$ 的紧子集.

   证明: f 连续.

5. 证明: 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 和所有 $p>1$ 成立
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{1/p}\le\frac{p}{p-1}n^{1-1/p}.$$

复分析

1. 设 f 在区域 D 内全纯, 满足 $|f(z)|$ 在 D 内为常数. 证明: f 在 D 内为常数.
2. 是否存在在开单位圆盘 U 内全纯的函数 f, 满足
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{n}, \quad n = 2,3,\ldots?$$
3. 是否存在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内全纯的函数 f, 满足 $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$?

实分析

1. 计算:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)dx.$$
2. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上可积函数, 证明: $m(\{x\in\mathbb{R} : |f(x)| > N\}) = o\left(\frac{1}{N}\right)$ as $N \to +\infty$.
3. 设 f 是 $(0,1)$ 上有界可测函数, 证明:
$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,1)} |f(x)|.$$