中国科学技术大学

2013 年数学夏令营考试试题

（线性代数与解析几何）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，不得使用计算器

一、 (15分) 给定空间内直线l_1: $x-1=y=z$ 与l_2: $x=y=1$.

(1) 求l_1 绕l_2 旋转所得旋转面的一般方程和参数方程;

(2) 求空间点A, 使得A到l_1 与l_2的距离相等;

(3) 求与l_1和l_2平行, 且到这两条直线的距离相等的平面π的方程.

二、 (10分) 求下述行列式:

(1) $\det\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{pmatrix}$

(2) $\det\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_1} \\ \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_1+b_n} & \frac{1}{a_2+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$

三、 (10分) 求如下线性方程组的通解:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=2 \\ x_2+x_3-2x_4+6x_5=6 \\ 5x_1-4x_2+3x_3-3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

四、 (10分) 设K为特征0域, F/K为域的有限扩张. 已知n阶K-方阵A,B 在域F上相似 (即存在可逆的F-系数方阵 T, 使得$T^{-1}AT=B$). 试证明A, B 在域K上相似.

五、 (10分) 设A,B为n-阶复幂幺方阵(即存在整数r,s使得$A^r=B^s=\mathrm{I}_n$).

(1) 证明A可相似到一个酉方阵;

(2) 若进一步$AB=BA$, 试证明A,B 可以同时相似到一个酉方阵.

六、 (10分) 设$\mathscr{A}$为复向量空间 V上的线性变换, 且在V的一组基$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下方阵为$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 求$\mathscr{A}$ 的所有特征值和特征向量;

(2) 求$\mathscr{A}$ 的一组基, 使得$\mathscr{A}$在该组基下的方阵恰好为A的Jordan标准形.

七、 (10分) 令V为全体n阶方阵在矩阵加法和数乘下形成的向量空间. 在V上定义双线性函数$(X, Y) = \mathrm{Tr}\, X^T Y$, $X, Y \in V$.

(1) 验证$(-,-)$定义了V上的一个内积;

(2) 试给出V在上述内积下的一组标准正交基.

八、 (15分) 令S_4为4元集合的对称群.

(1) 写出S_4的所有共轭类;

(2) 试确定S_4的所有正规子群;

(3) 计算S_4的自同构群.

九、 (10分) 令$n \geq 2$为正整数. 考察正交群O_n在$\mathbb{R}^n$上的自然作用(即将$\mathbb{R}^n$中的点看成列向量, 而O_n在列向量上作用由矩阵乘法给出).

(1) 试刻画$\mathbb{R}^n$在O_n 作用下的各个轨道.

(2) 试确定向量$\vec{a} = (1, 1, 0 \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$的稳定子群.

十、 (10分) 证明商环 $\mathbb{Q}[x]/(2x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 6x + 192)$ 为域.

十一、 (15分) (1) 设$F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$. 试判断$F/\mathbb{Q}$是否为正规扩张?

(2) 令E为多项式$f(x) = x^4 - 3$在有理数域$\mathbb{Q}$上的一个分裂域, 计算Galois群$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

(3) 求域扩张$E/\mathbb{Q}$中间域的个数.