中国科学技术大学

硕士学位研究生入学考试复试样题

（复变函数、实变函数、微分几何、近世代数）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□ 需使用计算器　　　　☑ 不使用计算器

一、 (20分) 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}.$$

二、 (20分) 求多项式 z^5-6z-2 在圆环 $1<|z|<2$ 上的根的个数.

三、 (10分) 设 $f(z)$ 是域 D 上的全纯函数, 并且存在常数 C_1 和 C_2 使得 $\mathrm{Re}f(z)+C_1\mathrm{Im}f(z)=C_2$. 求证: $f(z)$ 是常数.

四、 (15分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明: $f\notin L^1(\mathbb{R}^2)$.

五、 (15分) 设 $E\subset\mathbb{R}$, $m(E)=1$, 其中 m 是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue测度. 证明: 存在 E 的可测子集 A 满足 $m(A)=1/2$.

六、 (20分) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[0,1]$ 上一列实值绝对连续函数, 且满足

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛.

(2) $\int_0^1\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n'(x)|dx<\infty$.

证明: f 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

七、 (20分) 填空题

1、设 (1). Gauss曲率; (2). 主曲率; (3). 测地曲率; (4). 平均曲率; (5). 法曲率; 问:

a). 由曲面的第一基本形式决定的几何量为: ________________;

b). 刚体运动下不变的几何量为: ________________。

2. 设 T 是 $\mathbb{E}^3$ 中的一个合同变换，$\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 是 $\mathbb{E}^3$ 中的两个向量，则 $T(\vec{v})\wedge T(\vec{w})$ 和 $T(\vec{v}\wedge\vec{w})$ 的关系为: ____________________。

3. 设两张曲面片 S 和 $\tilde{S}$ 的第一基本形式满足 $I=\lambda\tilde{I}$，其中 $\lambda>0$ 是常数，问

它们的Gauss曲率 K 和 $\tilde{K}$ 的关系为：______________________。

八、 (12分) 设曲线 C: $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 以 s 为弧长参数，$\{\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$ 是其 Frenet 标架。若曲线 C 有固定的挠率 $\tau\neq 0$，求新的曲线 Γ：

$$\overrightarrow{\gamma}(s)=\frac{1}{\tau}\vec{N}(s)-\int_0^s\vec{B}(t)dt$$

的曲率和挠率。

九、 (12分) 设曲面 S 的参数表示为：

$$r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,av+b),\quad a,b\in\mathbb{R}$$

求曲面 S 的第一基本形式、第二基本形式、Gauss曲率和平均曲率。

十、 (10分) 是否存在曲面使得

(1). $I=du^2+dv^2,\quad II=dudv$；

(2). $I=du^2+\cos^2 u dv^2,\quad II=\cos^2 u du^2+dv^2$，

并简要说明你的理由。

十一、 (20分) 证明或者否定下述论断。

(1)（5分）设 p 为素数，$n\geq 1$ 为正整数。则 p^n 阶群必有非平凡中心。

(2)（5分）有限含幺交换环的素理想必为极大理想。

(3)（5分）含幺环 R 中的任意两个幂零元的和仍为幂零元。

(4)（5分）域的有限乘法子群必为循环群。

十二、 (20分) 设 G 为群，$f: a\mapsto a^3, a\in G$ 为 G 到自身的映射。证明：

（1）若 f 为群同态，则对任意的 $a,b\in G$，$a^2b^3=b^3a^2$；

（2）若更进一步 f 为单同态，则 G 为 Abel 群。

十三、 (10分) 设 G 为群。

（1）证明若 G 有指数有限的真子群，则 G 有指数有限的真正规子群。

（2）证明非零复数的乘法群 $\mathbb{C}^*$ 不含指数有限的真子群。