中国科学技术大学

大学生数学夏令营考试试题样题

（线性代数与抽象代数）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，不得使用计算器

一、 填空题 (每空3分, 共24分)

1 以xOy平面上的曲线$f(x,y)=0$绕x轴旋转所得的旋转面的方程是________________. 如果曲线方程是$x^2-y^2-1=0$, 由此得到的曲面类型是________________.

2 在3维实向量空间$\mathbb{R}^3$中, 设 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-1,0)^T$, $\alpha_3=(1,0,-1)^T$, $\beta=(-4,3,4)^T$. 则β在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的坐标是________________.

3 设$n>2$, 则$\det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ a_1+b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+b_n & a_2+b_n & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}$等于________________.

4 设$n>1$, 矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ -1 & 0 & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$, 则$A$的特征多项式是________________.

5 λ-矩阵$\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda^2-1 \\ 3\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$的Smith标准型是________________.

6 用Gram-Schmidt正交化方法将$\mathbb{R}^3$ (标准内积)的基$\{(1,1,1)^T,(-1,0,-1)^T,(-1,2,3)^T\}$化成的标准正交基是________________.

7 定义所有n阶实方阵构成的实线性空间V上的对称双线性函数为$f(X,Y)=\mathrm{Tr}(X^TY)$, $X,Y\in V$, 二次型为$Q(X)=f(X,X)$. 则$Q(X)$的正, 负惯性指数分别为________________.

二、 (6分) 求如下线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=5 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

三、 (10分) 设空间上有直线$l_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$和$l_2: (x,y,z)=(3+2t,t,3t-3)$. 设平面$\pi$与直线$l_1$, l_2平行, 且π与l_1的距离是$\sqrt{91}$, 求π的方程.

四、 (10分) 设$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求方阵$P$, 使得$P^{-1}AP$为$A$的Jordan标准形.

五、 (10分) 设V是n维欧氏空间, $(\ ,\ )$为其内积, V^*为其对偶空间. 证明

(1) 对于每个给定的$\alpha\in V$, 映射$f_\alpha\colon V\to\mathbb{R}, \beta\mapsto(\alpha,\beta)$ 是V^*中元素.

(2) 映射$f\colon V\to V^*, \alpha\mapsto f_\alpha$是$n$维线性空间$V$到$V^*$的同构映射.

六、 (15分) 设数域F上有限维空间V上线性变换$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=a\mathscr{B}\mathscr{A}$ ($a\in F$, a不为单位根), 且$\mathscr{A}$是可逆线性变换, 证明

(1) $\mathscr{B}$为幂零变换 (即存在正整数n, $\mathscr{B}^n=0$).

(2) $\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$有一个公共特征向量.

七、 (15分) 设$S=\{a,b,c,d\}$为四元集合.

(1) 计算S上所有二元运算的个数.

(2) 确定所有互不同构的四阶群.

(3) 计算S上使得S形成一个群的所有二元运算的个数.

八、 (15分) 设R为整环, $f(x)=x^4+1$为R上多项式.

(1) 分别在$R=\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_5$两种情形下将因式分解$f(x)$.

(2) 证明对于任意素数p, $f(x)$ 在$\mathbb{Z}_p[x]$ 中均可约.

九、 (20分) 令K为域, x,y为K的某个扩域中的元素, 且满足$x^2=2$, $y^2=3$.

(1) 分别就$K=\mathbb{Q}$ 以及 $K=\mathrm{F}_5$ 两种情形讨论$x+y$在K上的极小多项式。

(2) 分别就$K=\mathbb{Q}$ 以及 $K=\mathrm{F}_5$ 两种情形讨论$K(x+y)/K$是否为Galois扩张, 并求其Galois群.